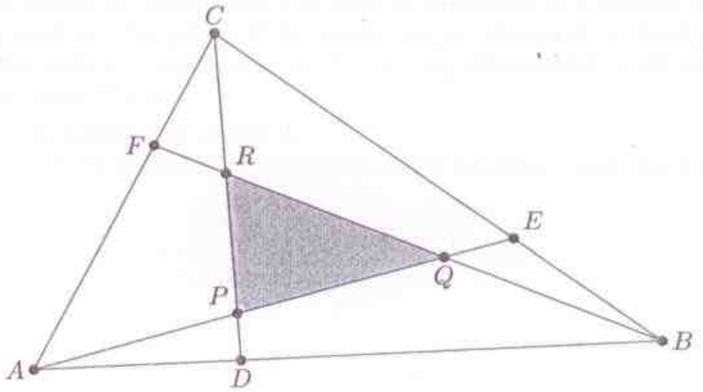
Scuola Superiore dell'Università, degli studi di Udine. Prova di ammissione per Matematica, Ingegneria, Architettura, TWM ed Economia, a.a. 2013-14.

Esercizio 1. I maghi Alfa e Beta eseguono il seguente numero. Alfa esce dalla stanza ed il pubblico estrae da un normale mazzo da 52 carte (quattro semi, 13 carte per seme) 5 carte e le porge a Beta. Beta esamina le 5 carte, ne sceglie una che viene mostrata al pubblico e nascosta, e infine ordina opportunamente le altre 4 carte. Alfa rientra nella stanza e riceve il mazzetto delle 4 carte preparate da Beta: dopo averle esaminate indovina la carta nascosta.

Spiegare come i maghi eseguono il loro numero senza errori.

Esercizio 2. Sia ABC un triangolo e sia D il punto ad un terzo del segmento AB. Similmente siano E e F i punti ad un terzo dei segmenti BC e CA. I segmenti CD, AE e BF si intersecano nei punti P, Q e R.



Stabilire il rapporto tra l'area del triangolo PQR e quella di ABC.

Ripetere l'esercizio supponendo che il rapporto tra le lunghezze di AD e AB, di BE e BC e di CF e CA sia $\frac{1}{n}$, dove $n > 3$.

Esercizio 3. Si ricordi che la differenza simmetrica di due insiemi $\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}$ è l'insieme dei punti che appartengono ad $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ ma non a $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$.

In un cerchio di raggio R, fissato un diametro d ed il diametro ad esso ortogonale d', si inscrivano due rettangoli $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ con i lati paralleli a d e a d', e tali che la base di $\mathcal{A}$ ha la stessa lunghezza dell'altezza di $\mathcal{B}$ mentre l'altezza di $\mathcal{A}$ ha la stessa lunghezza della base di $\mathcal{B}$ (d e d' sono assi di simmetria per i due rettangoli).

Trovare il rapporto altezza/base per cui l'area di $\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}$ è massima.

Esercizio 4. Il polinomio $x^3 + ax^2 + 6x - 4$ ha tre radici reali distinte che costituiscono una progressione aritmetica.

Determinare le radici.

Esercizio 5. Ogni tessera del domino contiene due numeri, non necessariamente distinti, appartenenti all'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. In una scatola di domino si trova esattamente una tessera di ogni possibile tipo.

Due tessere sono adiacenti se contengono un numero in comune. Una catena è una successione di tessere $(t_0, \ldots, t_n)$ tale che t_i e t_{i+1} sono adiacenti per ogni $i < n$ e, se $i < n-1$, un numero di t_{i+1} è in comune con t_i e l'altro numero di t_{i+1} è in comune con t_{i+2} (si tratta delle successioni di tessere che si formano in una normale partita di domino).

Se da una scatola di domino vengono estratte due tessere, qual è la probabilità che esse siano adiacenti?

Se abbiamo due tessere adiacenti, qual è la probabilità che estraendo una tessera tra quelle restanti nella scatola essa possa prolungare la catena iniziata con le prime due (non è quindi consentito inserire la terza tessera tra le due precedenti, ma la tessera estratta può essere aggiunta ad uno qualunque dei due estremi liberi)?

Esercizio 6. In una stanza vi sono due pareti P e Q (ovviamente ortogonali al pavimento) a distanza L l'una dall'altra. Una scala di lunghezza $> L$ è posta alla base della parete P ed è appoggiata alla parete Q. Similmente una scala di lunghezza $> L$ è posta alla base della parete Q ed è appoggiata alla parete P. Si indichi con h l'altezza rispetto al pavimento del punto in cui le due scale si incrociano e con A e B (rispettivamente) le altezze a cui le due scale poggiano sui muri P e Q.

Determinare h in funzione di A e di B.

Detta $m = (A + B)/2$ la media fra A e B, trovare il massimo valore che può assumere il rapporto h/m.