

Prova di Matematica B
Concorso di Ammissione alla Scuola Superiore
Settembre 2016

Esercizio 1

Un triangolo è incuneato tra due dischi disgiunti fissati nel piano. Risulta pertanto che un suo lato sia tangente al primo disco, un altro lato tangente al secondo disco. È possibile muoverlo mantenendo tale vincolo di tangenza? Se sì, quanti gradi di libertà ammette il cuneo? [Il candidato cerchi di formalizzare il concetto di *grado di libertà*, anche con esempi diversi da quello in esame, ed argomenti la soluzione del problema specifico].

Esercizio 2

Aldo, Giovanni e Giacomo decidono di giocare a dadi i loro risparmi, che consistono in 3 centesimi di Euro ciascuno, con queste regole:

- 1) chi vince una partita riceve dagli altri due giocatori 1 centesimo ciascuno;
- 2) chi rimane senza soldi esce dal gioco;
- 3) se restano a giocare in due, da quel momento in poi chi perde una partita dà 2 centesimi all'altro oppure gli dà l'ultimo centesimo rimastogli.

Qual è la probabilità che si giochi la sesta partita?

Esercizio 3

Dimostrare che la funzione della variabile reale x

$$f(x) = x \sin x - 1$$

ha un numero infinito di zeri in $x > 0$ e trovare una stima dell' n esimo zero per $n \rightarrow \infty$. Cosa si può dire degli zeri di $g(x) = x \sin x - \frac{1}{2}$ rispetto a quelli di $f(x)$?

Esercizio 4

Sia N un numero intero, $N \geq 2$. Assegnata la ennupla di numeri reali $\{f_i\}_{i=1}^N$, con $f_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$, i numeri reali incogniti $\{y_i\}_{i=1}^N$ sono tali che

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -f_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

dove $y_0 = 0$ e $y_{N+1} = 0$. Dimostrare che $y_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Il risultato vale anche se $f_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$, con $(f_1, \dots, f_N) \neq (0, \dots, 0)$?

Esercizio 5

Dimostrare che ogni cubo contiene due tetraedri regolari con vertici sui vertici del cubo. La loro unione ricopre tutto il cubo?