

8.07



Esame di Ammissione - A.A. 2023/24  
**Prova Scritta di Matematica - B**

5 settembre 2023

1. Un tarlo, contemplando un cubo formato da 27 cubetti di legno ritiene di poter entrare in uno dei cubetti, passare in uno adiacente e così di seguito; sempre da un cubetto ad uno adiacente, fino a raggiungere quello centrale, dopo essere passato una ed una sola volta attraverso tutti i 27 cubetti. Pensi che il progetto del tarlo sia realizzabile? Se lo è, si mostri un cammino possibile, in caso contrario si spieghi il perché.
2. Si provi l'esistenza di infiniti numeri primi della forma  $4k - 1$ , con  $k$  numero naturale.
3. Quanti interi diversi possono essere rappresentati mediante l'espressione

$$b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_7 \cdot 2^7,$$

ove  $b_i \in \{0, 1, 2\}$  per  $i = 1, 2, \dots, 7$ ?

4. Assegnata una circonferenza di raggio 1, sia  $AB$  una sua corda di lunghezza  $L > 0$ , sia  $C$  il suo punto medio e sia  $D$  il punto della circonferenza in cui termina il raggio passante per  $C$ . Esprimere la lunghezza  $\ell$  della corda  $AD$  in funzione di  $L$ . Individuare un valore di  $L$  razionale tale per cui  $\ell$  sia a sua volta razionale.
5. Si consideri la famiglia di funzioni

$$f(x) := \frac{ax + b}{cx + 1}$$

ove  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono parametri reali e i tre punti del piano cartesiano  $(i, y_i)$  con  $i = 0, 1, 2$ .

- a. Scegliere le ordinate dei tre punti in modo che nessuna delle funzioni della famiglia passi per i tre punti.
- b. Determinare una condizione necessaria e sufficiente sulle ordinate dei tre punti che garantisca che una delle funzioni della famiglia passi per i tre punti.