Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Prova di ammissione di Matematica Tema A

11 settembre 2014

Esercizio 1. Si consideri la funzione di variabile reale $f(x) = x/(x^2+1)$. Se ne disegni un grafico approssimativo. Sia x_0 un numero reale. Poniamo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,... Si discuta il comportamento della successione così ottenuta. Supponiamo che x_0 sia un numero intero. Dimostrare che $x_1, x_2, \ldots$ sono numeri razionali i cui denominatori (dopo aver ridotto ai minimi termini) formano una successione crescente.

Esercizio 2. Dimostrare che ogni numero razionale del tipo $m/10$, dove m è un numero intero, si può scrivere, in modo unico, nella forma

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{5} + n,$$

dove $a \in \{0,1\}$, $b \in \{0,1,2,3,4\}$ ed n è un numero intero (positivo o negativo). Invece ogni numero del tipo $m/100$ si decompone come

$$\frac{a}{a} + \frac{a'}{2} + \frac{b}{25} + \frac{b'}{5} + n,$$

dove $a, a' \in \{0,1\}$, $b, b' \in \{0,1,2,3,4\}$ ed n è come prima. Esprimere in tal modo $17/100$. Come pensate si possa generalizzare?

Esercizio 3. Indagare per quali interi n è vera la disuguaglianza

$$n! \cdot \frac{n}{n-1} \leq 1! + 2! + 3! + \cdots + n! \leq n! \cdot \frac{n}{n-2}.$$

Esercizio 4. Un quadrato magico di ordine 3 è una tabella con 3 righe e tre colonne, contenente ognuna un numero intero positivo, e tale che le somme dei numeri su ciascuna riga, ciascuna colonna e ciascuna diagonale dà sempre lo stesso risultato. Per esempio nel seguente quadrato le somme valgono sempre 15:

$Q_1 =$

2	7	6
9	5	1
4	3	8

A

Si chiede per quali valori del parametro intero a la tabella seguente

$Q_2 =$

$a+1$		$2a-3$
	a	
		$a-1$

è un quadrato magico. Fra i quadrati magici del tipo Q_2, si può fare in modo che anche tutti *i prodotti* dei numeri sulle righe, colonne e diagonali siano sempre lo stesso?

Esercizio 5. Una doppia bolla di sapone è formata da tre calotte sferiche, due esterne e una interna, come nella prima figura, che si incontrano formando ognuna con ogni altra un angolo di 120 gradi (seconda figura). La terza figura è una sezione longitudinale delle tre sfere, in cui i tre centri sono C_1, C_2, C_3, i raggi sono r_1, r_2, r_3 e P è un punto di intersezione. Trovare la misura degli angoli $C_1\hat{P}C_2$ e $C_2\hat{P}C_3$. Dimostrare poi che $1/r_2 = 1/r_1 + 1/r_3$ (si può usare il teorema dei seni).