

Prova scritta di matematica - A

Concorso di ammissione - Settembre 2022

Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

1. (DOMANDA A RISPOSTA APERTA) Le funzioni trigonometriche. Enunciare e descrivere le principali definizioni e proprietà di questo strumento, fondamentale in algebra e geometria.
2. Frosty il pupazzo di neve è formato da due palle di neve sferiche uniformi, inizialmente di raggi $2R$ e $3R$. La più piccola (che è la sua testa) sta sopra la più grande. Quando ogni palla di neve si scioglie, il suo volume diminuisce ad una velocità che è direttamente proporzionale alla sua superficie, la costante di proporzionalità essendo la stessa per ogni palla di neve. Durante lo scioglimento, le palle di neve rimangono sferiche e uniformi. Quando Frosty è la metà della sua altezza iniziale, mostra che il rapporto tra il suo volume e il suo volume iniziale è $37:224$. Qual è questo rapporto quando Frosty è un decimo della sua altezza iniziale?

3. Ogni giorno scelgo a caso cosa indossare, tra i miei pantaloni marroni, i miei pantaloni grigi e i miei jeans alla moda. Nel mio guardaroba ho una cravatta di seta nera, una marrone a pois viola piuttosto elegante, una cravatta regimental e un elegante foulard blu polvere che mi è stato regalato per Natale.

Con i miei pantaloni marroni o grigi, scelgo a caso quale cravatta indossare (compreso il foulard), tranne che, ovviamente, non indosso il foulard con i pantaloni marroni o la cravatta a pois con i pantaloni grigi. Con i jeans la scelta dipende se sia domenica o uno dei sei giorni feriali: nei giorni feriali la metà delle volte indosso una felpa color panna con $E = mc^2$ sul davanti e nessuna cravatta; altrimenti, la domenica (quando naturalmente indosso sempre la cravatta), scelgo a caso tra le mie quattro cravatte.

Questa mattina ho ricevuto per posta una mia foto compromettente. Ricevo spesso fotografie di questo tipo ed è probabile che siano state scattate in qualsiasi giorno della settimana. Tuttavia, in questa particolare fotografia, indosso la mia cravatta di seta nera.

Dimostrare, sulla base di questa informazione, che la probabilità che la fotografia sia stata scattata di domenica è di $11/68$.

Avrei dovuto dire che il lunedì tengo una lezione di analisi e quindi indosso sempre i jeans (per far sembrare le lezioni più comprensibili). Trova, sulla base delle informazioni complete, la probabilità che la fotografia sia stata scattata di domenica.

4. Un cerchio ω è tangente all'ipotenusa \overline{BC} del triangolo isoscele retto $\triangle ABC$. Le estensioni dei lati \overline{AB} ed \overline{AC} sono tangenti al cerchio nei punti E ed F rispettivamente. Determinare l'area di ω se l'area del triangolo è X^2 .

[EXTRA: Determinare l'area del quadrilatero EBCF]

5. Un treno di lunghezza l_1 e un autocarro di lunghezza l_2 si stanno dirigendo verso un passaggio a livello alle velocità u_1 e u_2 rispettivamente. Inizialmente, la parte anteriore del treno e la parte anteriore del camion si trovano a distanze d_1 e d_2 dall'incrocio. Trova le condizioni su u_1 e u_2 per cui si verificherà una collisione. Su un diagramma, con u_1 e u_2 misurati rispettivamente lungo gli assi x e y , disegnare la regione che rappresenta collisione.
6. Se $P(x)$ denota un polinomio di grado n tale che $P(k) = k/(k+1)$ per $k = 0, 1, 2, \dots, n$, determinare $P(n+1)$. [SUGGERIMENTO: considerare il polinomio $Q(x) = (x+1)P(x) - x$]